Analiza Funkcjonalna
WPPT IIIr. semestr letni 2011
WYKŁAD 9: Twierdzenie Hahna–Banacha

05/06/2008

Twierdzenie Hahna–Banacha (o przedłużaniu funkcjonału): Niech V_0 będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej unormowanej V (nawet nie zakładamy zupełności) i niech P_0 będzie funkcjonałem określonym na V_0, o normie r. Wtedy istnieje, określony na V funkcjonał P o normie r taki, że $P|_{V_0} = P_0$.

Dowód. Najpierw udowodnimy to twierdzenie dla funkcjonałów rzeczywistych unormowanych, gdzie V_0 i V traktowane są jako przestrzenie rzeczywiste. Rozważmy rodzinę wszelkich unormowanych ,,przedłużeń" rzeczywistych, funkcjonału P_0 na podprzestrzenie zawierające V_0:

$$\mathfrak{P} = \{(V', P') : P' \in {V'}^*,\ V' \supset V_0,\ \|P'\| = 1,\ P'|_{V_0} = P_0\}$$

Rodzina ta jest niepusta, gdyż zawiera (V_0, P_0). W rodzinie tej wprowadzamy częściowy porządek wg. relacji ,,być przedłużeniem":

$$(V'', P'') \succcurlyeq (V', P') \iff V'' \supset V' \ \&\ P''|_{V'} = P'.$$

Sprawdzamy założenia Lematu Kuratowskiego–Zorna: jeśli (V_α, P_α) jest łańcuchem (pozbiorem uporządkowanym liniowo) w $\mathfrak{P}$, to jego kres górny określamy jako parę (V', P'), gdzie $V' = \bigcup_\alpha V_\alpha$ (to jest podprzestrzeń liniowa V) oraz na tej sumie określamy P' wzorem $P'(v) = P_\alpha(v)$ biorąc dowolne α takie, że $v \in V_\alpha$. Elementarnie sprawdza się, że $(V', P') \in \mathfrak{P}$ oraz, że para ta dominuje cały łańcuch.
Zatem z Lematu K–Z wynika istnienie elementu maksymalnego (V', P') w $\mathfrak{P}$ (czyli maksymalnego przedłużenia dla (V_0, P_0), którego nie można przedłużyć na żadną podprzestrzeń istotnie większą niż V'). Pokażemy, że $V' = V$, co zakończy dowód.

Jeśli $V' \neq V$, to w V istnieje wektor $w \notin V'$. Niech $V'' = \mathrm{Lin}(V' \cup \{w\})$. Oczywiście $V'' \supset V'$ i zawieranie to jest istotne. Każdy wektor $v \in V''$ wyraża się jako $v = v' + \alpha w$, gdzie $v' \in V'$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Przedstawienie to jest jednoznaczne, gdyż gdyby były dwa różne, to odejmując je stronami doszlibyśmy do tego, że $w \in V'$.

Trzeba ustalić jaką wartość funkcjonału przypisać wektorowi w. Zauważmy, że dla dowolnych $v_1, v_2 \in V'$ mamy

$$P'(v_1) - P'(v_2) \le |P'(v_1) - P'(v_2)| \le \|v_1 - v_2\| \le \|v_1 - w\| + \|v_2 - w\|$$

zatem

$$P'(v_1) - \|v_1 - w\| \le P'(v_2) + \|v_1 - w\|.$$

Stąd supremum po wszystkich v_1 wyrażenia po lewej musi być nie większe od infimum po v_2 wyrażenia po prawej:

$$m = \sup_{v_1}(P'(v_1) - \|v_1 - w\|) \le M = \inf_{v_2}(P'(v_2) + \|v_1 - w\|).$$

Możemy teraz wektorowi w przypisać dowolnie wybraną liczbę r z przedziału $[m, M]$ i będzie dobrze. Czyli wektorowi $v = v' + \alpha w$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) przyporządkujemy

$$P''(v) = P'(v') + \alpha r.$$

Oczywiście jest to rozszerzenie P' na V'' Liniowość jest elementarna. Trzeba sprawdzić normę. Z jednorodności, (dzieląc przez $-\alpha$) wystarczy to robić na wektorach postaci $v = v' - w$. Wtedy mamy

$$|P''(v)| = |P'(v') - r|.$$

Ale

$$-P'(v') + r \leq -P'(v') + M \leq -P'(v') + P'(v') + \|v' - w\| = \|v\|$$

oraz

$$P'(v') - r \leq P'(v') - m \leq P'(v') - P'(v') + \|v' - w\| = \|v\|.$$

Pokazaliśmy, że $\|P''\|$ osiągana na V'' nie przekracza 1. Przedłużyliśmy na istotnie większą przestrzeń V'' rzekomo nieprzedłużalny funkcjonał P'. Ta sprzeczność implikuje, że $V' = V$, co kończy dowód w przypadku rzeczywistym. (Unormowanie nie stanowi istotnego ograniczenia, na mocy jednorodności normy).

Pozostał przypadek zespolony. Każdy funkcjonał zespolony P_0 na podprzestrzeni V_0 zespolonej przestrzeni V zapisuje się jako

$$P_0 = P_0^r + iP_0^i$$

gdzie $P_0^r = \mathrm{Re}(P_0)$ i $P_0^i = \mathrm{Im}(P_0)$ są funkjconałami rzeczywistymi na V_0 traktowanej jako rzeczywista podprzestrzeń rzeczywistej przestrzeni V. Ponadto mamy zależność:

$$\mathrm{Re}(P_0(iv)) = \mathrm{Re}(iP_0(v)) = -\mathrm{Im}(P_0(v)),$$

czyli

$$P_0^i(v) = -P_0^r(iv).$$

Tym sposobem wyraziliśmy P_0 przez de facto JEDEN funkcjonał rzeczywisty P_0^r, jak następuje:

$$P_0(v) = P_0^r(v) - iP_0^r(iv).$$

Jeśli chodzi o normę, to oczywiście $\|P_0^r\| \leq \|P_0\|$. Z drugiej strony, $|P_0(v)| = \sqrt{|P_0^r(v)|^2 + |P_0^r(iv)|^2} \leq \|P_0^r\|\|v\|$, co implikuje, że $\|P_0^r\| = \|P_0\|$.

Z Tw. Hahna–Banacha udowodnionego już dla funkcjonałów rzeczywistych, przedłużamy teraz P_0^r do funkcjonału rzeczywistego P^r określonego na całej przestrzeni V, nie zwiększając normy. Wreszcie definiujemy

$$P(v) = P^r(v) - iP^r(iv).$$

Sprawdzenie, że to jest już funkcjonał zespolony (trzeba sprawdzić wyciąganie stałych zespolonych), że przedłuża P, i że nie zwiększa normy jest kompletnie elementarne.

Tomasz Downarowicz